Modèle multiparti pour les grands graphes de terrain

Stefanie Kosuch
(LRI, Université Paris Sud, Orsay)
et
Matthieu Latapy
(LIP6, Université Pierre et Marie Curie, Paris)

Introduction

– **Motivation/But:**

Traitement de grands graphes avec des propriétés communes, particulèrement

- la distribution de dégrés hétérogène
- la densité (globale) faible
- la densité locale forte

– **Etat de l'art**:

Vaste ensemble de résultats sur des graphes aléatoires avec une distribution de dégrés hétérogène

Introduction

– **Motivation/But:**

  Traitement de grands graphes avec des propriétés communes, particulèrement

  - la distribution de dégrés hétérogène
  - la densité (globale) faible
  - la densité locale forte

– **Etat de l'art:**

  Vaste ensemble de résultats sur des graphes aléatoires avec une distribution de dégrés hétérogène

Idée:

- Créer à partir de ces grands graphes des graphes multi-partis semblables aux graphes aléatoires prescrites

- Coder les propriétés complexes dans les dégrés

$\Rightarrow$ Trouver des résultats sur les graphes du départ à l'aide des résultats connus sur ces graphes aléatoires

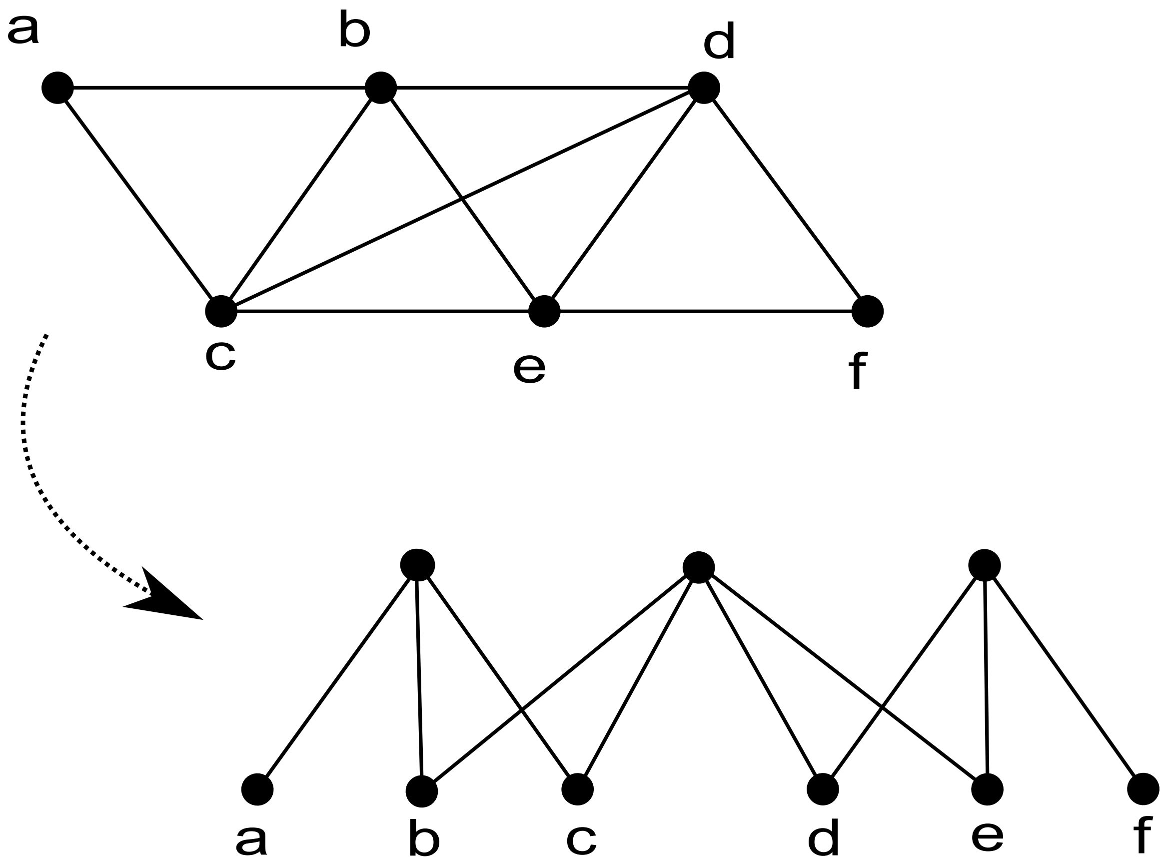
Idée:

- Créer à partir de ces grands graphes des graphes multi-partis semblables aux graphes aléatoires prescrites

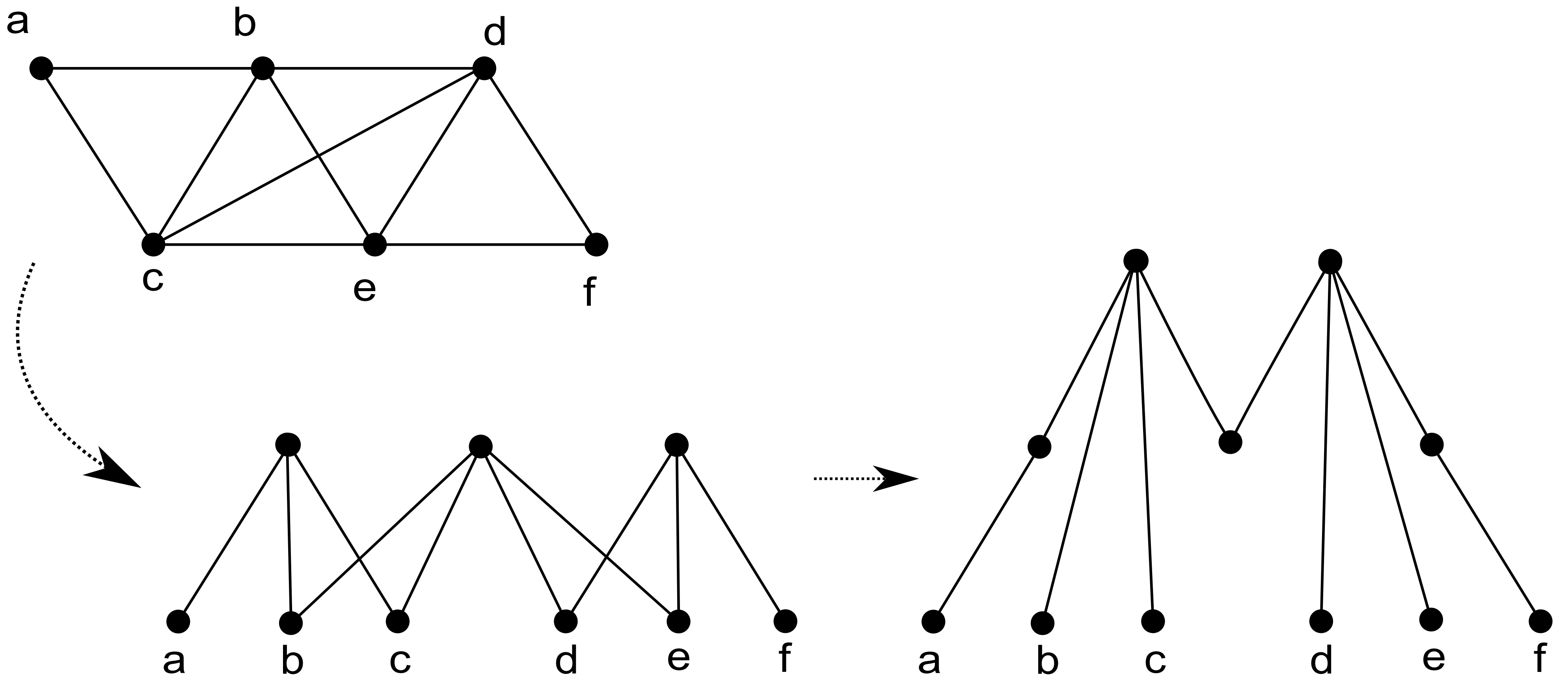
- Coder les propriétés complexes dans les dégrés

$\Rightarrow$ Trouver des résultats sur les graphes du départ à l'aide des résultats connus sur ces graphes aléatoires

Modélisation des graphes comme projetés de graphes bipartis



Extension de l'idée de base en utilisant des graphes multipartis



Formalisation en termes d'ensembles

- $\mathbf{F_0}$: Ensemble des sommets de G

  $F_0 = \{X_1^0, X_2^0, ..., X_{m_0}^0\}$ avec $m_0 = |V(G)|$

- $\mathbf{F_1}$: Ensemble des cliques max dans G (vues comme sous-ensembles de F_0: $F_1 \subset \mathcal{P}(F_0)$)

- $\mathbf{F_n} = \{X_1^n, X_2^n, ..., X_{m_n}^n\}$ où

  $X_i^n = \{\bigcap X_{i_p}^{n-1}, X_{i_1}^{n-1}, ..., X_{i_{l(n,i)}}^{n-1}\}$ $(l(n,i) > 1)$ t.q. $\forall i = 1, ..., m_n$:

  (1) $|\bigcap X_{i_p}^{n-1}| \geq 2$ (les intersections ne sont pas triviales)

  et

  (2) $X_i^n \not\subseteq X_j^n$ $\forall j \neq i$ (les ensembles sont maximaux)

Formalisation en termes d'ensembles

- $\mathbf{F_0}$: Ensemble des sommets de G

  $F_0 = \{X_1^0, X_2^0, ..., X_{m_0}^0\}$ avec $m_0 = |V(G)|$

- $\mathbf{F_1}$: Ensemble des cliques max dans G (vues comme sous-ensembles de F_0: $F_1 \subset \mathcal{P}(F_0)$)

- $\mathbf{F_n} = \{X_1^n, X_2^n, ..., X_{m_n}^n\}$ où

  $X_i^n = \{\bigcap X_{i_p}^{n-1}, X_{i_1}^{n-1}, ..., X_{i_{l(n,i)}}^{n-1}\}$ $(l(n,i) > 1)$ t.q. $\forall i = 1, ..., m_n$:

  (1) $|\bigcap X_{i_p}^{n-1}| \geq 2$ (les intersections ne sont pas triviales)

  et

  (2) $X_i^n \not\subseteq X_j^n$ $\forall j \neq i$ (les ensembles sont maximaux)

Formalisation en termes d'ensembles

- $\mathbf{F_0}$: Ensemble des sommets de G

  $F_0 = \{X_1^0, X_2^0, ..., X_{m_0}^0\}$ avec $m_0 = |V(G)|$

- $\mathbf{F_1}$: Ensemble des cliques max dans G (vues comme sous-ensembles de F_0: $F_1 \subset \mathcal{P}(F_0)$)

- $\mathbf{F_n} = \{X_1^n, X_2^n, ..., X_{m_n}^n\}$ où

  $X_i^n = \{\bigcap X_{i_p}^{n-1}, X_{i_1}^{n-1}, ..., X_{i_{l(n,i)}}^{n-1}\}$ $(l(n,i) > 1)$ t.q. $\forall i = 1, ..., m_n$:

  (1) $|\bigcap X_{i_p}^{n-1}| \geq 2$ (les intersections ne sont pas triviales)

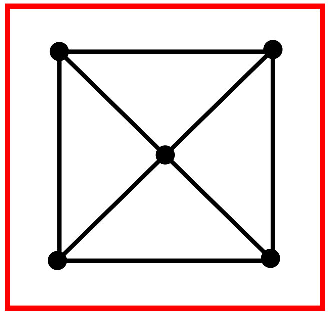
  et

  (2) $X_i^n \not\subseteq X_j^n$ $\forall j \neq i$ (les ensembles sont maximaux)

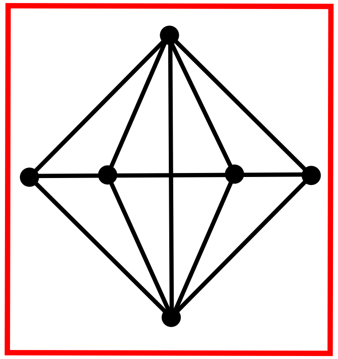
Problème:

L'algorithme ne s'arrête pas toujours:

1



2



1) $\alpha = 4$, $n = 5$; 2) $\alpha = 3$, $n = 6$;

$n = |G|$; $\alpha = \#$ de cliques max

„Causes“ connues

$\longrightarrow$ Propriété $(*)$

(et des variantes de cette propriété)

Propriété $(*)$

$$\exists\, n \geq 1 \text{ et}$$

$$X \subseteq F_n \ (X = \{X_1^n, ..., X_k^n\}) \text{ avec } |X| \geq 3 \text{ t.q.}$$

(i) $\exists\, x \in \cap_{i=1}^{k} X_i^n$.

(ii) $\forall\, X_i^n,\ X_{i+1}^n \in X,\ \exists\ y_i \in X_i^n \cap X_{i+1}^n$ avec

$$y_i \notin X_j^n \ \forall\, j \neq i, i+1.$$

$\Rightarrow$ L'algorithme ne s'arrête jamais.

Propriété $(*)$

$$\exists\, n \geq 1 \text{ et}$$

$X \subseteq F_n$ $(X = \{X_1^n, \ldots, X_k^n\})$ avec $|X| \geq 3$ t.q.

(i) $\exists\, x \in \cap_{i=1}^{k} X_i^n$.

(ii) $\forall\, X_i^n,\ X_{i+1}^n \in X,\ \exists\ y_i \in X_i^n \cap X_{i+1}^n$ avec

$y_i \notin X_j^n\ \forall\, j \neq i, i+1$.

$\Rightarrow$ L'algorithme ne s'arrête jamais.

Propriété $(*)$

$\exists\, n \geq 1$ et

$X \subseteq F_n$ $(X = \{X_1^n, ..., X_k^n\})$ avec $|X| \geq 3$ t.q.

(i) $\exists\, x \in \cap_{i=1}^{k} X_i^n$.

(ii) $\forall\, X_i^n,\ X_{i+1}^n \in X$, $\exists\ y_i \in X_i^n \cap X_{i+1}^n$ avec

$y_i \notin X_j^n\ \forall\, j \neq i, i+1$.

$\Rightarrow$ L'algorithme ne s'arrête jamais.

Propriété $(*)$

$\exists\, n \geq 1$ et

$X \subseteq F_n$ ($X = \{X_1^n, ..., X_k^n\}$) avec $|X| \geq 3$ t.q.

(i) $\exists\, x \in \cap_{i=1}^{k} X_i^n$.

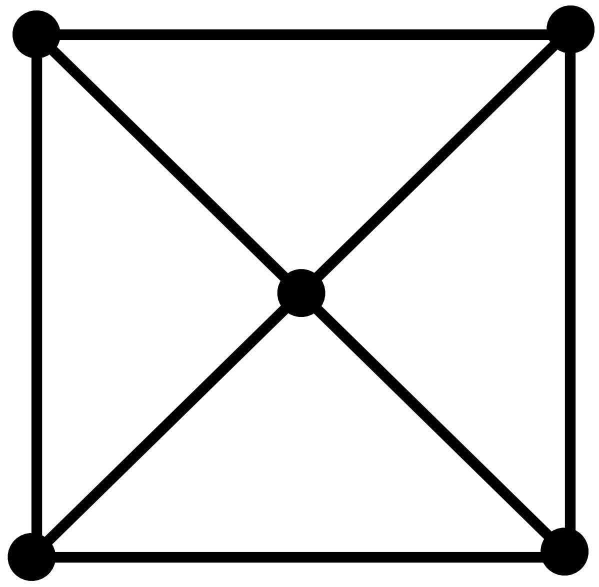
(ii) $\forall\, X_i^n$, $X_{i+1}^n \in X$, $\exists\ y_i \in X_i^n \cap X_{i+1}^n$ avec

$y_i \notin X_j^n\ \forall\, j \neq i, i+1$.

$\Rightarrow$ L'algorithme ne s'arrête jamais.

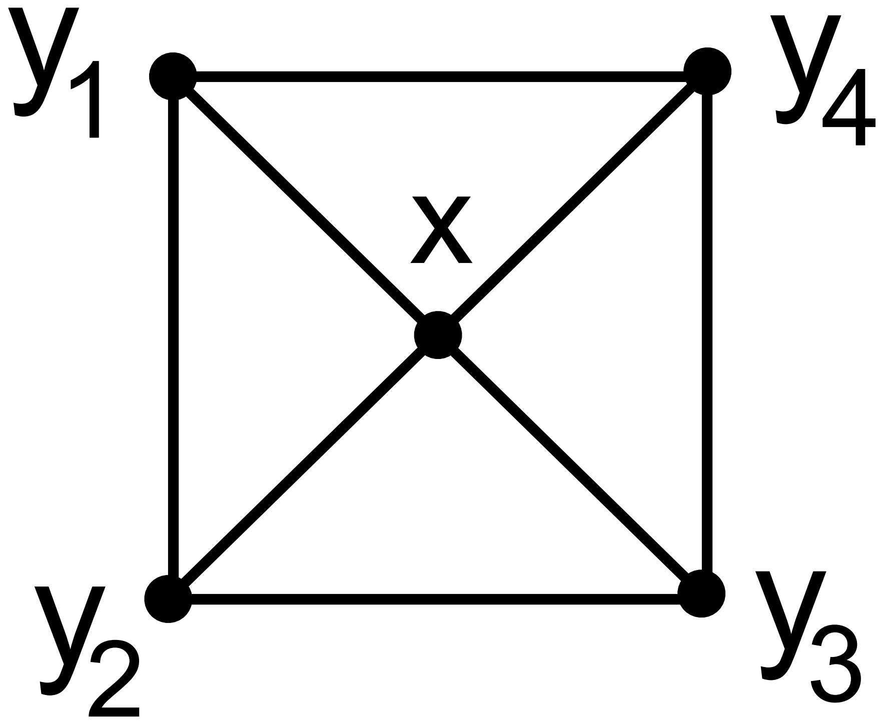
Exemple:

1



Exemple:

1



Question:

Est-ce qu'on peut modifier l'algorithme d'une telle façon qu'il s'arrête sur tous les graphes du départ?

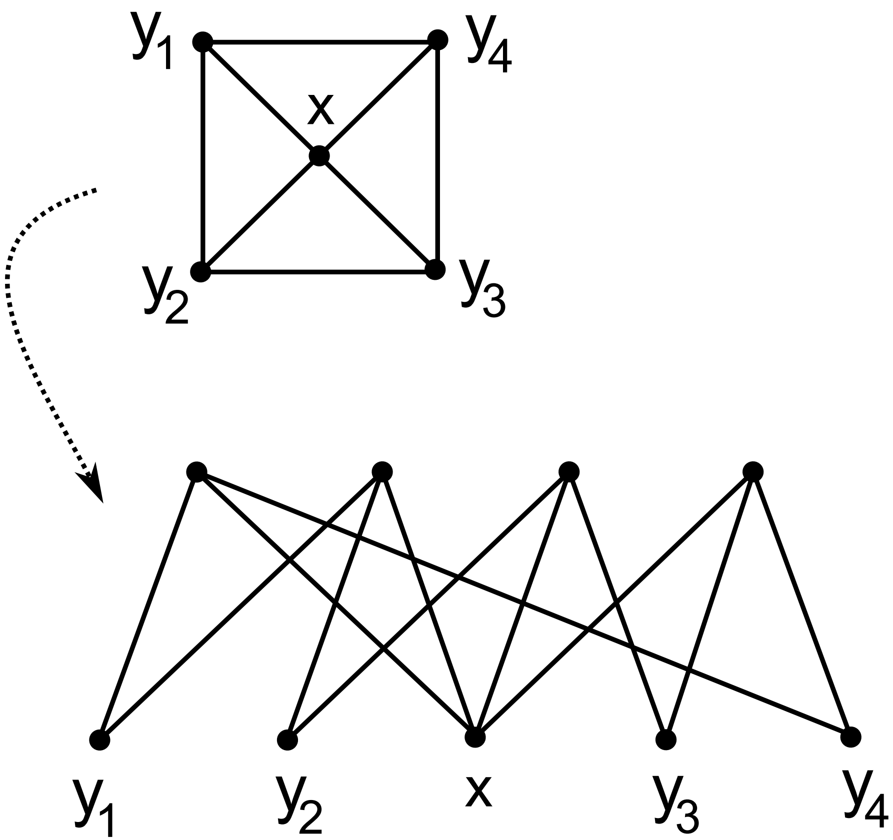
Variante 2 de l'algorithme

Nous modifions l'algorithme en exigant que,

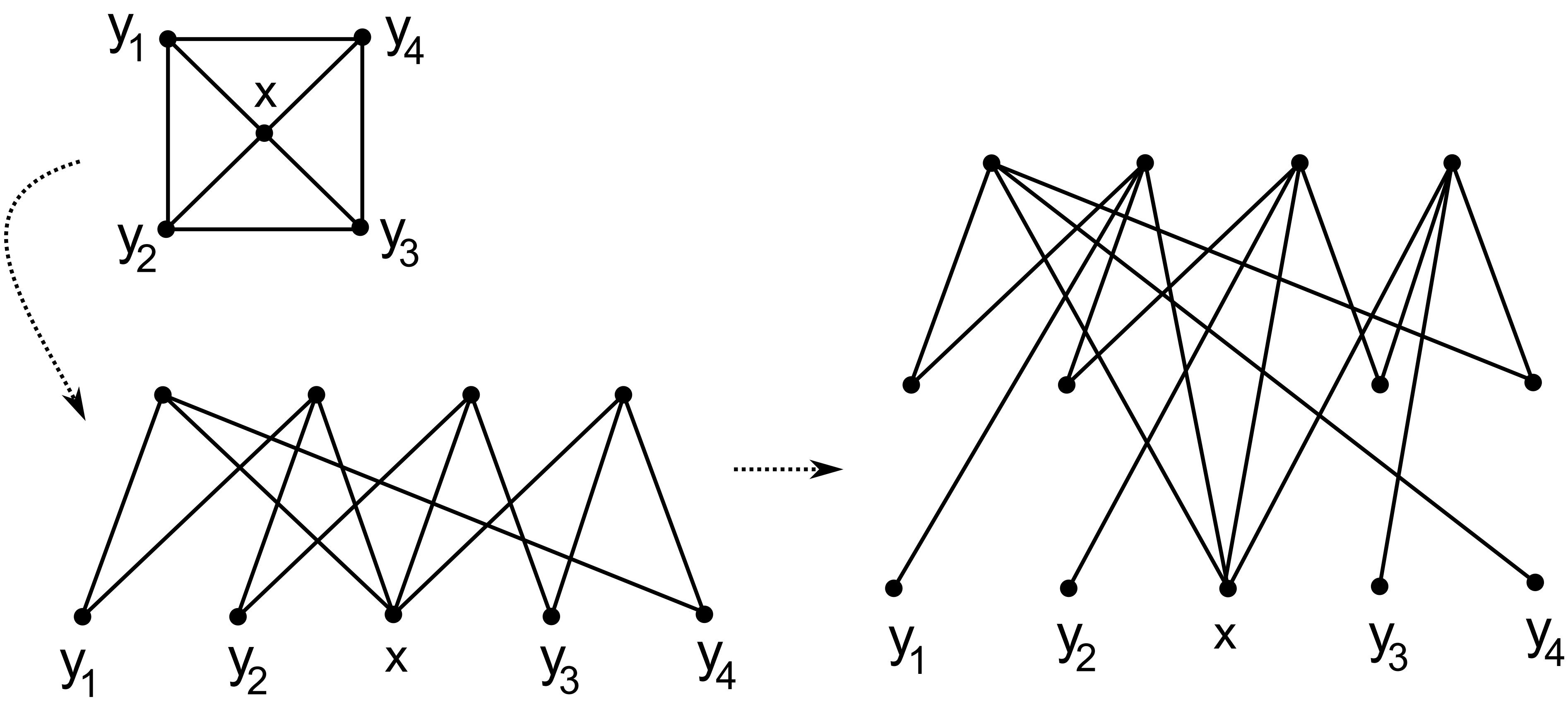
$$\forall\ X^n \in F_n\ (n > 1),$$

il y ait $|X^n \cap F_{n-2}| \geq 2$.

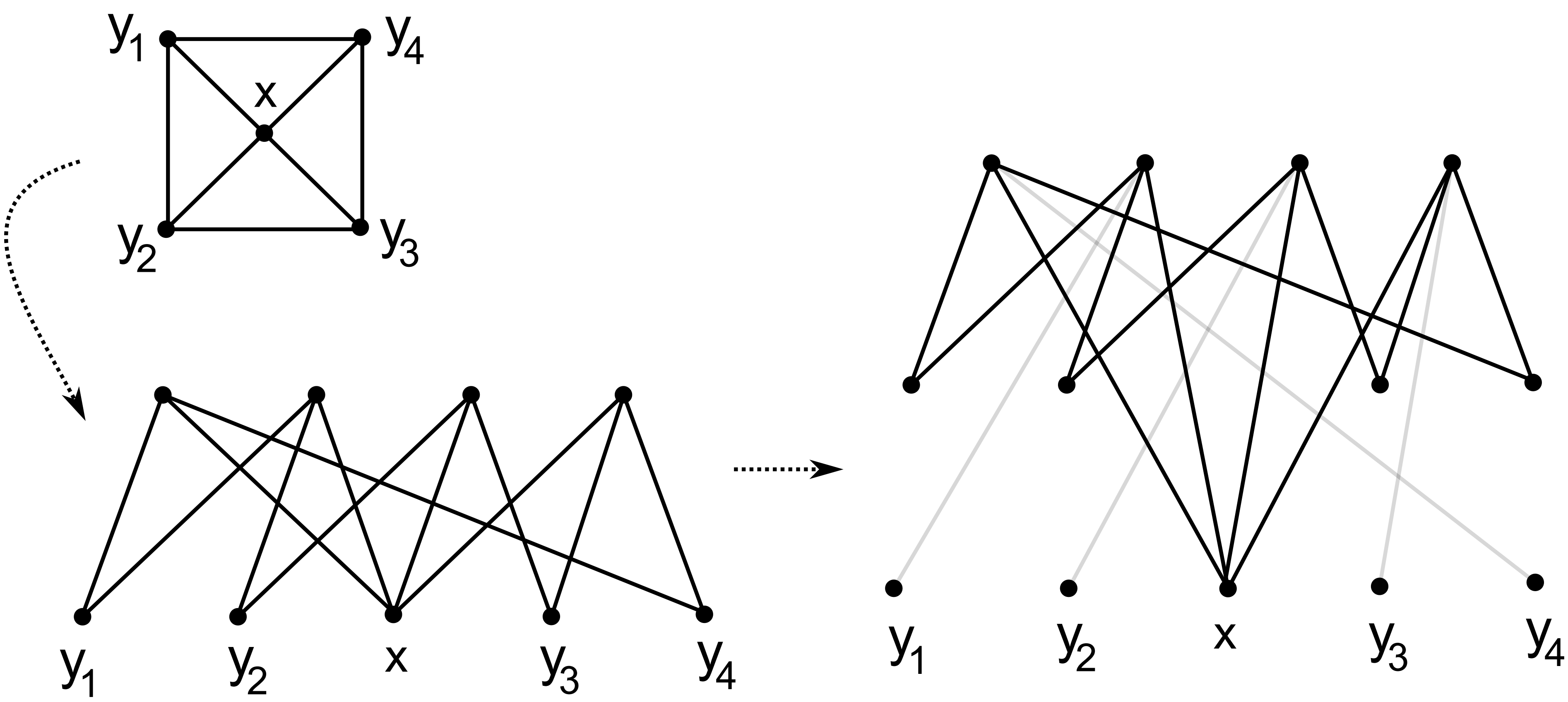
Exemple:



Exemple:



Exemple:



Lemme:

S'il exist un graphe G t.q.

la variante 2 de l'algorithme ne s'arrête pas sur G

$$\Rightarrow$$

la variante initiale ne s'arrête pas non plus sur G

Perspectives

Question:

Est-ce que la variante 2 de l'algorithme s'arrête sur tous les exemples?

Autres modifications possibles:

- Ne pas exiger que les ensembles (resp. cliques) soient maximaux

- Trouver un critère d'arrêt de l'algorithme

Dankeschön

:-)