IFIPS
Université Paris-Sud 11

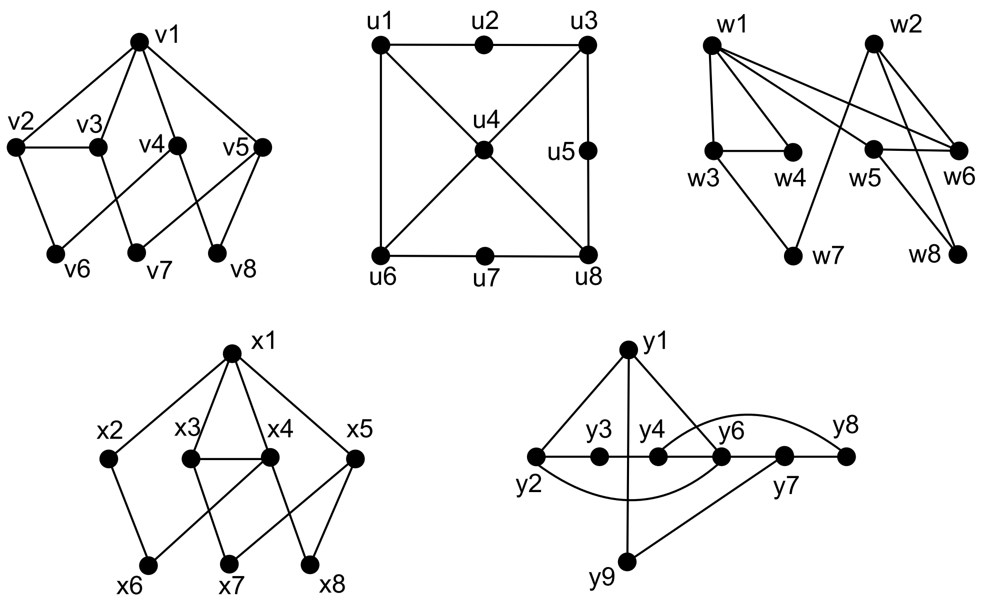
S7 - informatique
1er semestre 2009/2010

Théorie des Graphes

TD 1 : Notions de base / Paramètres / Chaines et Cycles

Exercice 1: Construire un graphe $G = (V, E)$ avec
$V(G) = \{v_i | i = 1, \ldots, 10\}$
$E(G) = \{v_i v_j | 1 \leq i, j \leq 10; i \neq j; i + j \geq 10\}$
Donner i) son ordre $|G|$, ii) le nombre d'arêtes $|E|$, iii) son dégré minimum $\delta(G)$, iv) son dégré maximum $\Delta(G)$, v) son dégré moyen $d(G)$ ainsi que vi) le dégé des sommets v_3, v_5 et v_{10} et vii) les ensembles $N(v_3)$, $N(v_5)$ et $N(v_{10})$.
Pour $i \leq 5$, quel graphe particulier est $G[N(v_i)]$? Montrer que ceci n'est pas vrai pour $i = 6$.

Exercice 2: Déterminer pour chaque pair parmi les graphes suivants s'ils sont isomorphes ou pas. Justifier votre réponse.



Exercice 3: On s'intéresse aux graphes cubiques. Essayer de construire de tels graphes avec 4,5,6 ou 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouver-le.

***Exercice 4:** La situation est-elle identique pour les graphes dont tous les sommets sont de dégré 4 ?

Exercice 5: Existe-il un graphe $G = (V, E)$ tel que...

- ...$|V| = 5$ et $d(G) = 2$?
- ...$|V| = 7$ et $d(G) = 1$?
- ...$|V| = 6$, $\delta(G) = 3$ et $\Delta(G) = 5$?
- ...$|V| = 6$, $\delta(G) = 0$ et $\Delta(G) = 5$?

Justifier vos réponses.

***Exercice 6:** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{N}$ telle qu'il existe toujours un graphe $G = (V, E)$ non-trivial (i.e. avec au moins deux sommets) avec $\delta(G) = k$ et $\Delta(G) = |V| - 1$. Justifier votre réponse.

Exercice 7: Démontrer **par récurrence** que

$$|E(K^n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 8: Demontrer que pour tout graphe le nombre de sommets de dégré impair est pair.

***Exercice 9:** Essayer de construire un graphe ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des dégrés distincts. Qu'est-ce que vous remarquez ? Qu'en déduisez-vous ? Démontrer-le.

Exercice 10: Soit G un graphe. Comment est-ce qu'on peut (facilement), à partir de G, construire un graphe G' tel que $\omega(G) = \alpha(G')$ et $\omega(G') = \alpha(G)$, et ceci en connaissant ni $\omega(G)$, ni $\alpha(G)$?

Exercice 11: Demontrer que chaque chaine $P(x, y)$ contient une chaine élémentaire $P'[x, y]$.

***Exercice 12:** Soit C un cycle. Donner une condition suffisante sur sa longueur $|C|$ pour que C contienne un cycle élémentaire.

Si vous avez des questions, sur le cours ou les TDs, ou si vous continuez avec les exercises à la maison et vous avez des question sur la/votre solution, n'hésitez pas à nous contacter :

Stefanie Kosuch
Bureau 114, LRI (Bât. 490)
stefanie.kosuch@lri.fr

Thomas Lavergne
Bureau 116, LIMSI (Bât. 518)
thomas.lavergne@limsi.fr

Livre conseillé pour la partie théorique :
http ://diestel-graph-theory.com/GrTh.html