IFIPS
Université Paris-Sud 11

S7 - informatique
1er semestre 2009/2010

Théorie des Graphes

Cours 3: Forêts et Arbres II / Modélisation

1 Forêts et arbres II

Théorème 1.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un graphe T avec $|T| = n$:*

- *T est un arbre.*
- *Chaque pair x, y de sommets de T est relié par un chemin élémentaire unique.*
- *T est connexe et $|E(T)| = n - 1$.*
- *T est minimal connexe, i.e. T est connexe et chaque arête de T est un isthme.*
- *T est maximal acyclique, i.e. T ne contient pas de cycle élémentaire mais pour tout pair de sommets x, y non-adjacents dans T le graphe $T + xy$ contient un cycle élémentaire.*

Corollaire 1.2. *Un arbre a au moins une feuille.*

Proof. Soit T un arbre avec n sommets. Si T ne contient qu'un sommet, ce sommet est une feuille. Soit donc $n \geq 2$.
Preuve par absurde: *Supposons* que T ne contient pas de feuille. Comme dans un graphe connexe non-trivial (i.e. avec au moins deux sommets) il n'existe pas de sommet isolé, il en suit que $d(v) \geq 2$ pour tous les sommets $v \in V(T)$ et donc aussi $d(G) \geq 2$. On obtient la *contradiction* suivante:

$$2 \leq d(G) = \frac{2 \cdot |E|}{|G|} = \frac{2 \cdot (n-1)}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

□

Définition 1.3. *Un* **arbre couvrant** *d'un graphe G est un sous-graphe T tel que T est un arbre et $V(T) = V(G)$.*

Proposition 1.4. *Tout graphe connexe contient un arbre couvrant.*

Proof. □

Proposition 1.5. *Un graphe G est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle élémentaire de longueur impair.*

Preuve de la direction "$\Leftarrow$". Et ceci en utilisant des arbres couvrants des composantes connexes de G (l'autre direction vue au 2e cours)] □

2 Modélisation avec des graphes

On cherche à résoudre un problème d'optimisation donné en le modélisant avec un (multi)-graphe (orienté ou non-orienté) puis en utilisant des utiles et algorithmes connus en Théorie des Graphes.
Pour modéliser un problème en termes de graphes il faut répondre aux questions suivantes:

- Quelle simplifications est-ce que je veux faire?
- Quel type de graphe est-ce que je choisis pour mon modèle ?
- Qu'est-ce qui représentent les sommets/noeuds ?
- Qu'est-ce qui représentent les arêtes/arcs ? Quels sommets/noeuds sont reliés, lesquels ne le sont pas ?
- Quelle question est-ce qu'il faut se poser sur le graphe obtenu ?
- Quelle est la formulation de cette question en termes de graphes ?
- Comment répondre à cette question ?

Problème 1 On cherche à résoudre le problème suivant: Donné un réseau de couloirs droites. On veut placer des guardians d'une manière que chaque couloir est surveillé par au moins un guardian et ceci en utilisant le moins de guardians possible.

Modélisation On prend un graphe G avec

- $V(G)$: ensemble des intersections
- $E(G)$: ensemble des couloirs partiels maximal non-interrompus par une intersection avec un autre couloir

Question: Comment placer les guardians sur les sommets tels que chaque arête est surveiller par un guardian.
Problème en termes de graphes: Minimiser k tel qu'il existe un sous-ensemble $U \subseteq V(G)$ des sommets de G avec $|U| = k$ tel que pour tous les arêtes de G au moins une des extrémités est dans U.
Ou: Minimiser k tel qu'il existe un sous-ensemble $U \subseteq V(G)$ des sommets de G avec

$$\{e \in E(G) | e = uv \wedge [u \in U \vee v \in U]\} = E(G)$$

ou

$$\{v \in v(G) | \exists e = uv \in E(G) \text{ t.q. } u \in U\} \cup U = V(G)$$

Problème 2 On cherche à démontrer le suivant: Dans un groupe d'au moins deux personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Modélisation On prend un graphe quelquonque G avec

- $V(G)$: ensemble représentant des personnes du groupe
- $E(G)$: ensemble représentant des couples d'amis

Problème en termes de graphes: Est-ce qu'ils existent deux noueds $u, v \in V(G)$ avec $d(u) = d(v)$?

Problème 3 Est-il vrai que dans un groupe de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A) ?

Modélisation On prend un graphe G de six sommets quelquonque avec

- $V(G)$: ensemble représentant des personnes du groupe
- $E(G)$: ensemble représentant des couples qui se connaissent mutuellement

Problème en termes de graphes: Est-ce qu'il existe soit un stable d'ordre 3, soit une clique d'ordre 3?

Problème 4 Un cavalier peut-il se déplacer sur un échiquier en passant sur chacune des cases une et une seule fois ?

Modélisation On prend un graphe G avec 64 sommets tel que

- $V(G)$: ensemble des cases du chequier
- $E(G)$: ensemble des déplacements possibles pour un cavalier (i.e. les sommets $v_{i,j}$ et $v_{l,h}$ sont reliés ssi un cavalier peut aller de la case (i,j) directement sur la case (l,h))

Question: Est-il possible de parcourir le graphe en suivant les arêtes d'une manière que chaque sommet est passé une et une seule fois?
Problème en termes de graphes: Est-ce qu'il existe une chaine élémentaire P dans G qui contient tout les sommets de G, i.e. avec $V(P) = V(G)$? (Un tel chemain est appelé "chaine hamiltonienne".

Problème 5 Donné un ensemble de villes et un ensemble de routes. Une route relie toujours exactement deux villes. Pour aller d'une ville à une autre on peut donc soit prendre la route directe entre ces deux villes (si existante), soit passer par d'autres villes. La question est: Si jamais une des villes n'est pas passable, par example à cause des travaux, est-ce qu'il est toujours possible d'aller de chaqu'une des autres villes à toutes les autres (à part de la ville non-passable)?

Problème 6 Donné un réseau de métro. Supposons que le temps de parcours entre deux stations reliées est toujours le même (y compris le temps de changement éventuel), disont t. Donner pour chaque couple de stations A,B le temps minimal pour aller de A à B.

Modélisation On prend un graphe G avec 64 sommets tel que

- $V(G)$: ensemble des stations de métro
- $E(G)$: ensemble des connections entre ces stations (il suffit de relier deux stations avec au plus une arête)

Problème en termes de graphes: Pour chaque couple u, v de sommets de G, quel est le chemin élémentaire de longueur minimale reliant u et v?

Problème 7 De combien de couleurs a-t-on d'au moins besoin pour colorer une carte d'une façon que deux pays ayant toute une frontière (et non simplement un point) en commun sont toujours colorés avec deux couleurs différentes ?

Modélisation On prend un graphe G avec

- $V(G)$: ensemble des pays
- $E(G)$: ensemble des couples de pays avec une frontière en commun?

Problème en termes de graphes: Minimiser k tel qu'il existe une k-partition $V_1, \ldots, V_k$ des sommets de G d'une facon que pour tout arête $e = uv$ avec $u \in V_i$ et $v \in V_j$ il est $i \neq j$.

Problème 8 Vous avez une ville dont les quartiers sont des îles. Quelques-unes de ces îles sont reliées par des ponts. Est-il possible de visiter tous les quartiers en utilisant chaque pont une et une seule fois?

Modélisation On prend un graphe G avec

- $V(G)$: ensemble des îles
- $E(G)$: ensemble des couples d'îles reliées par un pont?

Question: Est-il possible de parcourir le graphe d'une manière que chaque arête est passé une et une seule fois?
Problème en termes de graphes: Existe-il une chaine dans G qui contienne chaque arête de G une et une seule fois? (Une telle chaine est appelée "chaine eulérienne".)

Si vous avez des questions, sur le cours ou les TDs, ou si vous continuez avec les exercises à la maison et vous avez des question sur la/votre solution, n'hésitez pas à nous contacter:

Stefanie Kosuch
Bureau 114, LRI (Bât. 490)
stefanie.kosuch@lri.fr

Thomas Lavergne
Bureau 116, LIMSI (Bât 518)
thomas.lavergne@limsi.fr

Livre conseillé pour la partie théorique:
http://diestel-graph-theory.com/GrTh.html