Théorie des Graphes

Cours 2: Structures et graphes particuliers II/ Connectivité /Arbres

1 Structures et graphes particuliers II

Proposition 1.1. *Chaque graphe G contient une chaine élémentaire de longueur $\delta(G)$. Si $\delta(G) \geq 2$, G contient en plus un cycle élémentaire de longueur $\delta(G)+1$.*

Proof. □

Définition 1.2. *Soit G un graphe et soient $V_1, \ldots, V_k$ des sous-ensembles non-vides de $V(G)$ (i.e. $V_i \subseteq V(G)$ $\forall i = 1, \ldots, k$). On appelle le k-uplet $(V_1, \ldots, V_k)$ une* **(k-)partition** *des sommets de G si*

- $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V(G)$
- $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$ *avec* $i \neq j$ *il est* $V_i \cap V_j = \emptyset$

Les ensembles $V_1, \ldots, V_k$ sont appelés les **classes** *de la partition.*

Définition 1.3. *Un* **graphe biparti** *est un graphe tel qu'il existe une 2-partition (A, B) des sommets G de sorte que chaque arête de G a une extrémité dans chacune des classes de la partition.*

Proposition 1.4. *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle élémentaire de longueur impair.*

Preuve de la direction "$\Rightarrow$" (l'autre direction plus tard). □

Définition 1.5. *On dit qu'un graphe biparti G avec $V(G) = (A, B)$ est* **complet** *si tous les sommets de A sont adjacents à tous les sommets de B. Le graphe biparti complet avec $|A| = n_1$ et $|B| = n_2$ sera noté K_{n_1,n_2}.*

2 Connectivité

Définition 2.1. *On dit qu'un graphe non-vide G est* **connexe** *si pour tout pair $x, y \in V(G)$ il existe une chaine P_{xy} dans G reliant x avec y.*

Proposition 2.2. *Soit G un graphe connexe. Il existe une énumération des sommets de G $(v_1, \ldots, v_n)$ telle que pour tout i $(1 \leq i \leq n)$ $G[v_1, \ldots, v_i]$ est connexe.*

Proof. □

Définition 2.3. *Dans un graphe, une* **composante connexe** *X est un sous-graphe induit maximal connexe. Maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe induit connexe plus grand contenant les sommets de X.*

Proposition 2.4. *Soient $X_1, \dots, X_k$ les composantes connexes d'un graphe G. Il en suit que $(X_1, \dots, X_k)$ est une k-partition de G.*

Proof. $\square$

Définition 2.5. *On dit qu'un graphe G est* **k-connexe** *($k \geq 2$) si $|G| > k$ et pour tout ensemble de sommets $U \subseteq V(G)$ avec $|U| \leq k-1$, $G - U$ est connexe.*

Corollaire 2.6. *Soit G un graphe k-connexe. Il en suit que G est aussi k'-connexe pour tout k' avec $2 \leq k' \leq k$.*

$\square$

Définition 2.7. *On définit la* **connectivité** *d'un graphe comme étant le plus grand k tel que G est k-connexe. La connectivité d'un graphe G est notée par $\kappa(G)$.*

3 Forêts et arbres

Définition 3.1. *Une* **forêt** *est un graphe acyclique, i.e. un graphe sans cycle élémentaire.*

Définition 3.2. *Un* **arbre (tree)** *est une forêt connexe, i.e. un graphe acyclique connexe. Les sommets de dégré 1 dans un arbre sont appelés ses* **feuilles**.

Définition 3.3. *Un* **isthme (bridge)** *dans un graphe G est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexe de G.*

Théorème 3.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un graphe T avec $|T| = n$:*

- *T est un arbre.*
- *Chaque pair x, y de sommets de T est relié par un chemin élémentaire unique.*
- *T est connexe et $|E(T)| = n - 1$.*
- *T est minimal connexe, i.e. T est connexe et chaque arête de T est un isthme.*
- *T est maximal acyclique, i.e. T ne contient pas de cycle élémentaire mais pour tout pair de sommets x, y non-adjacents dans T le graphe $T + xy$ contient un cycle élémentaire.*

Si vous avez des questions, sur le cours ou les TDs, ou si vous continuez avec les exercises à la maison et vous avez des question sur la/votre solution, n'hésitez pas à nous contacter:

Stefanie Kosuch
Bureau 114, LRI (Bât. 490)
stefanie.kosuch@lri.fr

Thomas Lavergne
Bureau 116, LIMSI (Bât 518)
thomas.lavergne@limsi.fr

Livre conseillé pour la partie théorique:
http://diestel-graph-theory.com/GrTh.html