IFIPS
Université Paris-Sud 11

S7 - informatique
1er semestre 2009/2010

Théorie des Graphes

Cours 1: Notions de base / Paramètres / Structures et graphes particuliers

1 Définitions de bases et Notations

Définition 1.1. *$P^k(S)$: ensemble des sous-ensembles de S à k éléments.*

Définition 1.2. *Un* **graphe** *G est un couple $(V(G), E(G))$ de deux ensembles disjoints: Les éléments de $V(G)$ sont appelés les* **sommets (vertices)** *du graphe G. $E(G) \subseteq P^2(V(G))$ contient les* **arêtes (edges)** *de G. Une arête $e = \{u, v\}$ entre les sommets u et v peut aussi être notée par uv.*

Définition 1.3. *L'***ordre** *$|G|$ d'un graphe est défini comme étant le nombre de sommets de G, i.e. $|G| = |V(G)|$. Nous allons souvent utiliser la variable n pour l'ordre d'un graphe et m pour le nombre d'arêtes qu'il contient, i.e. $n := |G|$ et $m := |E(G)|$.*

Définition 1.4. *On dit qu'un sommet u et une arête e sont* **incidents** *si $e = uv$. Dans ce cas u est une des deux* **extrémités** *de e. Deux sommets u, v qui sont reliés par une arête sont* **adjacents** *et on dit que u est* **voisin** *de v (et vice versa). L'ensemble des voisins d'un sommet v est appelé le* **voisinage (neighbourhood)** *de v, noté par $N(v)$.*

Définition 1.5. *Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes. On dit que G et G' sont* **isomorphes** *s'il existe une bijection $\varphi : V \to V'$ telle que*

$$vw \in E \iff \varphi(v)\varphi(w) \in E' \quad \forall v, w \in V$$

Définition 1.6. *Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes. G' est un* **sous-graphe (subgraph)** *de G si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. On dit que G' est un* **sous-graphe induit (induced subgraph)** *de G si $V' \subseteq V$ et pour tous les couples de sommets $(u, v) \in V' \times V'$ il est $uv \in E'$ si et seulement si $uv \in E$. Dans ce cas, on dit aussi que G' est le* **sous-graphe de G induit par** *V', noté $G[V']$.*

Notation 1.7. *Soit G un graphe et $U \subseteq V(G)$ un sous-ensemble des sommets de G. Par $G - U$ nous notons le graphe G' qu'on obtient quand on supprime dans G tous les sommets de U. Si U ne contient qu'un sommet v on écrira aussi $G - v$.*

Définition 1.8. *Un graphe G est dit* **complet** *si chaque sommet $u \in V(G)$ est adjacent à chaque autre sommet $v \in V$. Autrement dit il est $E(G) = P^2(V(G))$. Le graphe complet d'ordre n est noté par K^n.*

Proposition 1.9.

$$|E(K^n)| = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

Proof. Chaque sommet est incident à $(n-1)$ arêtes. Si on fait la somme $\sum_{v \in G}(n-1) = n \cdot (n-1)$ on compte chaque arête deux fois.

$\square$

Corollaire 1.10. *Pour tout graphe G il est $|E(G)| \leq \frac{n(n-1)}{2}$*

$\square$

2 Paramètres

Définition 2.1. *Le* **dégré** $d(v)$ *d'un sommet v est défini comme étant le nombre de voisins de v, i.e. $d(v) = |N(v)|$. Pour un graphe G on peut donc définir les paramètres suivants:*

- *Le* **dégré minimum** $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$
- *Le* **dégré maximum** $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$
- *Le* **dégré moyen** $d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{|G|}$

Proposition 2.2.

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$$

Proof.

$$d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{|G|} \geq \frac{\sum_{v \in V(G)} \delta(G)}{|G|} = \frac{|G| \cdot \delta(G)}{|G|} = \delta(G)$$
$$d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{|G|} \leq \frac{\sum_{v \in V(G)} \Delta(G)}{|G|} = \frac{|G| \cdot \Delta(G)}{|G|} = \Delta(G)$$

$\square$

Proposition 2.3.

$$d(G) = \frac{2 \cdot |E|}{|V|}$$

Proof.

$$d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{|G|} = \frac{2 \cdot |E|}{|V|}$$

$\square$

Définition 2.4. *Un graphe est* **k-regulier** *si $d(v) = k$ pour tous les sommets $v \in V(G)$. Un graphe 3-régulier est aussi appelé* **cubique**.

Définition 2.5. *Une* **clique** *dans un graphe G est un sous-graphe complet de G. L'ordre de la plus grande clique dans G est noté $\omega(G)$.*

Définition 2.6. *Un* **stable** *dans un graphe G est un sous-graphe induit G' tel qu'il n'existe pas d'arêtes entre les sommets de G'. L'ordre du plus grand stable d'un graphe G est noté $\alpha(G)$.*

3 Graphes et structures particuliers

Définition 3.1. *Une* **chaine** *est un graphe P de la forme*

$$V(P) = \{v_0, \ldots, v_k\} \quad E(P) = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\} \quad (k \geq 0)$$

Ici k est appelé la **longueur** *de P.*

Définition 3.2. *Une* **chaine élémentaire** *est une chaine dont tous les sommets sont distincts. La longueur d'une chaine élémentaire P est égale au nombre d'arêtes de P. On notera P^k la chaine élémentaire de longueur k.*

Définition 3.3. *Un* **cycle** *est un graphe C de la forme:*

$$V(P) = \{v_0, \ldots, v_{k-1}\} \quad E(P) = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_0\} \quad (k \geq 3)$$

k est appelé la **longueur** *de C.*

Définition 3.4. *Un* **cycle élémentaire** *est un cycle dont tous les sommets sont distincts. La* **longueur** *d'un cycle élémentaire est égale au nombre d'arêtes ou de sommets de C. Le cycle élémentaire de longueur (i.e. d'ordre) k est noté C^k.*

Si vous avez des questions, sur le cours ou les TDs, ou si vous continuez avec les exercises à la maison et vous avez des question sur la/votre solution, n'hésitez pas à nous contacter:

Stefanie Kosuch
Bureau 114, LRI (Bât. 490)
stefanie.kosuch@lri.fr

Thomas Lavergne
Bureau 116, LIMSI (Bât 518)
thomas.lavergne@limsi.fr

Livre conseillé pour la partie théorique:
http://diestel-graph-theory.com/GrTh.html